Partielle Integration

Theorie

Die partielle Integration folgt aus der Produktregel:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vorgehen: Zerlege den Integranden in $u \cdot v'$. Wähle u so, dass die Ableitung einfacher wird, und v' so, dass du eine Stammfunktion v kennst.

Beispiel: $\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + C$, mit $u = x$, $u' = 1$, $v' = e^x$ und $v = e^x$.

Auftrag: Berechne die Integrale. Notiere u, u', v' und v und kontrolliere durch Ableiten. Bei $\ln x$ nutze den Faktor 1. Teilweise musst du die Methode mehrfach anwenden. Winkel stehen im Bogenmass.

1. Lineare Faktoren

a) $\int xe^x\,\mathrm{d}x$

b) $\int 2xe^x\,\mathrm{d}x$

c) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$

d) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

e) $\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x$

2. Logarithmusfunktionen

a) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

b) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

c) $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

d) $\int (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$

e) $\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

3. Wiederholte partielle Integration

a) $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$

b) $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$

c) $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

d) $\int x^3e^x\,\mathrm{d}x$

e) $\int (x^2+1)e^x\,\mathrm{d}x$

4. Lineare Argumente und zyklische Integrale

a) $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

c) $\int x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$

e) $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$

© 2026 Davide Conti · CC BY-NC-ND 4.0

Lösungen

$C \in \mathbb{R}$ ist eine beliebige Konstante. Bei Logarithmen gilt $x > 0$. Die Ansätze nennen die erste Wahl von u und v'.

1. Lineare Faktoren

a) $(x-1)e^x + C$
Ansatz: $u = x,\ v' = e^x$

b) $2(x-1)e^x + C$
Ansatz: $u = 2x,\ v' = e^x$

c) $-x\cos x + \sin x + C$
Ansatz: $u = x,\ v' = \sin x$

d) $x\sin x + \cos x + C$
Ansatz: $u = x,\ v' = \cos x$

e) $xe^x + C$
Ansatz: $u = x + 1,\ v' = e^x$

2. Logarithmusfunktionen

a) $x\ln x - x + C$
Ansatz: $u = \ln x,\ v' = 1$

b) $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$
Ansatz: $u = \ln x,\ v' = x$

c) $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$
Ansatz: $u = \ln x,\ v' = x^2$

d) $(\dfrac{x^2}{2} + x)\ln x - \dfrac{x^2}{4} - x + C$
Ansatz: $u = \ln x,\ v' = x + 1$

e) $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
Ansatz: $u = (\ln x)^2,\ v' = 1$

3. Wiederholte partielle Integration

a) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$
Ansatz: $u = x^2,\ v' = e^x$

b) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$
Ansatz: $u = x^2,\ v' = \sin x$

c) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$
Ansatz: $u = x^2,\ v' = \cos x$

d) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$
Ansatz: $u = x^3,\ v' = e^x$

e) $(x^2 - 2x + 3)e^x + C$
Ansatz: $u = x^2 + 1,\ v' = e^x$

4. Lineare Argumente und zyklische Integrale

a) $(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4})e^{2x} + C$
Ansatz: $u = x,\ v' = e^{2x}$

b) $\dfrac{x}{2}\sin(2x) + \dfrac{1}{4}\cos(2x) + C$
Ansatz: $u = x,\ v' = \cos(2x)$

c) $-\dfrac{x}{3}\cos(3x) + \dfrac{1}{9}\sin(3x) + C$
Ansatz: $u = x,\ v' = \sin(3x)$

d) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$
Ansatz: $u = \sin x,\ v' = e^x$

e) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$
Ansatz: $u = \cos x,\ v' = e^x$

Zu 4d: Setze $I = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$. Zweimalige partielle Integration ergibt $I = e^x\sin x - e^x\cos x - I$, also $2I = e^x(\sin x - \cos x)$. Bei 4e funktioniert das Umstellen entsprechend. Die Konstante C wird am Ende ergänzt.

© 2026 Davide Conti · CC BY-NC-ND 4.0