Integration durch Substitution

Theorie

Die Substitution ersetzt einen inneren Ausdruck durch eine neue Variable:

$$u = g(x), \qquad \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Vorgehen: Wähle u, ersetze den gesamten Integranden samt $\mathrm{d}x$, integriere nach u und setze danach $u = g(x)$ wieder ein.

Beispiel: $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$, da $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$.

Auftrag: Berechne die Integrale durch Substitution. Notiere jeweils u und $\mathrm{d}u$. Kontrolliere durch Ableiten. Winkel stehen im Bogenmass.

1. Lineare innere Funktionen

a) $\displaystyle\int (2x+1)^4\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int e^{3x-2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \sqrt{5x+1}\,\mathrm{d}x$

2. Potenzfunktionen und Wurzeln

a) $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^3\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x(x^2+2)^4\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

3. Exponentialfunktion und Logarithmus

a) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x^2e^{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

4. Trigonometrische und gemischte Funktionen

a) $\displaystyle\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x\sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

© 2026 Davide Conti · CC BY-NC-ND 4.0

Lösungen

Alle Ergebnisse enthalten die Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ und gelten auf einem zusammenhängenden offenen Intervall, auf dem der Integrand definiert ist.

1. Lineare innere Funktionen

a) $\dfrac{(2x+1)^5}{10} + C$
Substitution: $u = 2x + 1$

b) $\dfrac{1}{3}e^{3x-2} + C$
Substitution: $u = 3x - 2$

c) $\dfrac{1}{2}\sin(2x) + C$
Substitution: $u = 2x$

d) $\dfrac{1}{4}\ln|4x+3| + C$
Substitution: $u = 4x + 3$

e) $\dfrac{2}{15}(5x+1)^{3/2} + C$
Substitution: $u = 5x + 1$

2. Potenzfunktionen und Wurzeln

a) $\dfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$
Substitution: $u = x^2 + 1$

b) $\dfrac{1}{10}(x^2+2)^5 + C$
Substitution: $u = x^2 + 2$

c) $\dfrac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C$
Substitution: $u = x^3 + 1$

d) $\sqrt{x^2+4} + C$
Substitution: $u = x^2 + 4$

e) $-\dfrac{1}{x^2+1} + C$
Substitution: $u = x^2 + 1$

3. Exponentialfunktion und Logarithmus

a) $e^{x^2} + C$
Substitution: $u = x^2$

b) $\dfrac{1}{3}e^{x^3+1} + C$
Substitution: $u = x^3 + 1$

c) $\ln(x^2+3) + C$
Substitution: $u = x^2 + 3$

d) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + C$
Substitution: $u = \ln x$

e) $\ln(1+e^x) + C$
Substitution: $u = 1 + e^x$

4. Trigonometrische und gemischte Funktionen

a) $\sin(x^2) + C$
Substitution: $u = x^2$

b) $-\dfrac{1}{2}\cos(x^2+1) + C$
Substitution: $u = x^2 + 1$

c) $\dfrac{1}{2}\sin^2 x + C$
Substitution: $u = \sin x$

d) $\ln(2+\sin x) + C$
Substitution: $u = 2 + \sin x$

e) $\ln|\ln x| + C$
Substitution: $u = \ln x$

© 2026 Davide Conti · CC BY-NC-ND 4.0