

Definitions- und Wertebereich

Merke: Der Definitionsbereich D enthält alle erlaubten Eingaben x . Der Wertebereich $W = \{f(x) \mid x \in D\}$ enthält alle tatsächlich angenommenen Funktionswerte. Nenner dürfen nicht null sein; unter Quadratwurzeln muss der Ausdruck ≥ 0 sein. Logarithmen verlangen ein positives Argument. Eckige Intervallklammern schliessen einen Randwert ein, runde schliessen ihn aus.

Auftrag: Bestimme in 1–3 und 5 den maximalen reellen Definitionsbereich D und den Wertebereich W . Bestimme in 4 den Wertebereich zum gegebenen D .

1. Lineare und quadratische Funktionen

a) $f(x) = 2x - 3$

d) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 2$

b) $f(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = 5$

c) $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$

f) $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$

2. Wurzelfunktionen

a) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

d) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 2} + 1$

e) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

f) $f(x) = \sqrt{2x + 4} - 3$

3. Gebrochenrationale Funktionen

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \frac{2}{x+1} + 3$

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

4. Vorgegebene Definitionsbereiche

a) $f(x) = 2x - 1, \quad D = [-1, 3]$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad D = [-4, -1]$

b) $f(x) = x^2, \quad D = [-2, 3]$

e) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad D = [-1, 8]$

c) $f(x) = (x-1)^2, \quad D = (1, 4]$

f) $f(x) = -(x-2)^2 + 4, \quad D = [0, 3]$

5. Spezielle Funktionen: log, exp, sin und cos

a) $f(x) = \log_{10}(x)$

d) $f(x) = e^{x-1} + 2$

b) $f(x) = \ln(x-2)$

e) $f(x) = \sin(x)$

c) $f(x) = e^x$

f) $f(x) = 2 \cos(x) - 1$

Lösungen

1. Lineare und quadratische Funktionen

- a) $D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$
- b) $D = \mathbb{R}, W = [1, \infty)$
- c) $D = \mathbb{R}, W = (-\infty, 4]$
- d) $D = \mathbb{R}, W = [-2, \infty)$
- e) $D = \mathbb{R}, W = \{5\}$
- f) $D = \mathbb{R}, W = (-\infty, -1]$

2. Wurzelfunktionen

- a) $D = [3, \infty), W = [0, \infty)$
- b) $D = [-2, \infty), W = [1, \infty)$
- c) $D = (-\infty, 4], W = [0, \infty)$
- d) $D = [0, \infty), W = (-\infty, 2]$
- e) $D = [-3, 3], W = [0, 3]$
- f) $D = [-2, \infty), W = [-3, \infty)$

3. Gebrochenrationale Funktionen

- a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, W = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- c) $D = \mathbb{R}, W = (0, 1]$
- d) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, W = (0, \infty)$
- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}, W = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
- f) $D = \mathbb{R}, W = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

4. Vorgegebene Definitionsbereiche

- a) $W = [-3, 5]$
- b) $W = [0, 9]$
- c) $W = (0, 9]$
- d) $W = [-1, -\frac{1}{4}]$
- e) $W = [0, 3)$
- f) $W = [0, 4]$

5. Spezielle Funktionen: log, exp, sin und cos

- a) $D = (0, \infty), W = \mathbb{R}$
- b) $D = (2, \infty), W = \mathbb{R}$
- c) $D = \mathbb{R}, W = (0, \infty)$
- d) $D = \mathbb{R}, W = (2, \infty)$
- e) $D = \mathbb{R}, W = [-1, 1]$
- f) $D = \mathbb{R}, W = [-3, 1]$

Hinweise: Bei 2e gilt $0 \leq 9 - x^2 \leq 9$, also $0 \leq f(x) \leq 3$. Bei 3c ist $x^2 + 1 \geq 1$; der Funktionswert 0 wird nie erreicht. Bei 3e gilt $f(x) = x + 2$ nur für $x \neq 2$: Die Lücke bleibt, daher fehlt auch der Wert 4. Bei 3f folgt aus $(x-1)^2 \geq 0$ und $(x+1)^2 \geq 0$, dass $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$; die Randwerte werden bei $x = \pm 1$ erreicht. Bei 4b liegt 0 im Definitionsbereich; das Minimum ist deshalb 0.