

Gravitation

Gravitationskraft, Abstandsgesetz und Satelliten | 4 Aufgaben

Kompakte Theorie Zwischen zwei Massen wirkt die Gravitationskraft

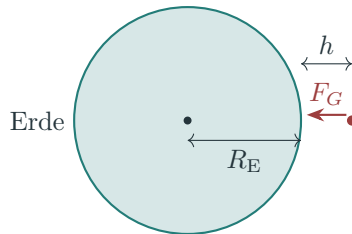
$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad g(r) = G \frac{M}{r^2}.$$

r ist der Abstand der *Mittelpunkte*, nicht die Höhe über einer Oberfläche. Für eine Kreisbahn gilt $F_G = mv^2/r$; ohne Luftwiderstand ist die Fluchtgeschwindigkeit $v_F = \sqrt{2GM/r}$.

Rechne mit $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$, $M_E = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_E = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$. Vernachlässige Erdrotation, Atmosphäre und andere Himmelskörper. Runde auf drei signifikante Stellen.

Aufgabe 1: Gewichtskraft auf der Erde

Eine Person mit der Masse $m = 75,0 \text{ kg}$ steht auf der Erdoberfläche. Ein Raumschiff bringt sie anschliessend auf die Höhe $h = 400 \text{ km}$ über der Oberfläche.



- Berechne g und die Gewichtskraft der Person an der Erdoberfläche.
- Bestimme g und die Gewichtskraft in 400 km Höhe.
- Gib das Verhältnis der beiden Gewichtskräfte an. Erkläre, warum die Person im Raumschiff trotzdem schwerelos wirken kann.

Platz für Skizzen und Rechnungen

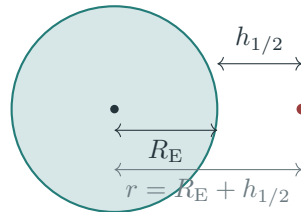


Das Abstandsgesetz

Warum die Höhe mit dem Erdradius zusammengezählt wird

Aufgabe 2: Gewichtskraft halbieren

Eine Sonde bewegt sich radial von der Erdoberfläche weg. Gesucht ist die Höhe $h_{1/2}$, bei der die Gravitationskraft auf die Sonde halb so gross ist wie an der Oberfläche. Die Masse der Sonde bleibt konstant.



- Stelle die Gleichung $F_G(R_E + h_{1/2}) = \frac{1}{2}F_G(R_E)$ auf und kürze gemeinsame Faktoren.
- Löse nach $h_{1/2}$ auf und berechne die Höhe in Kilometern.
- Beurteile die Aussage: «Bei halber Gewichtskraft ist die Sonde einen halben Erdradius über der Oberfläche.»
- Um welchen Faktor ändert sich F_G , wenn der Abstand vom Erdmittelpunkt verdreifacht wird?

Platz für Skizzen und Rechnungen

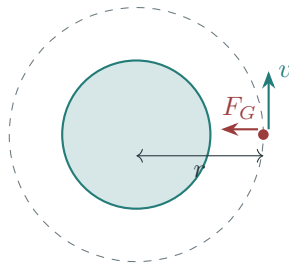


Ein Satellit auf Kreisbahn

Gravitation als Zentripetalkraft

Aufgabe 3: Umlauf in 400 km Höhe

Ein Satellit mit der Masse $m_S = 500 \text{ kg}$ bewegt sich auf einer idealen Kreisbahn in der Höhe $h = 400 \text{ km}$. Der Bahnradius ist $r = R_E + h$.



- Berechne die Gravitationskraft auf den Satelliten. Vergleiche sie mit seiner Gewichtskraft auf der Erdoberfläche.
- Setze $F_G = F_Z$ und leite $v = \sqrt{GM_E/r}$ her. Berechne die Bahngeschwindigkeit.
- Berechne die Umlaufzeit $T = 2\pi r/v$ in Minuten und die Zahl der Umläufe pro 24 Stunden.
- Erkläre, warum die Bahngeschwindigkeit bei gleichem Bahnradius nicht von m_S abhängt.

Platz für Skizzen und Rechnungen



Flucht von der Erde

Energie und Fluchtgeschwindigkeit

Aufgabe 4: Von der Kreisbahn zur Flucht

Eine Raumsonde soll sich ohne weiteren Antrieb von der Erdoberfläche entfernen können. Ihre Masse beträgt $m = 500 \text{ kg}$. Die Gravitationsenergie sei $E_{\text{pot}}(r) = -GM_{\text{E}}m/r$ mit Nullpunkt im Unendlichen.

- Berechne die notwendige Fluchtgeschwindigkeit an der Erdoberfläche und vergleiche sie mit der Kreisbahngeschwindigkeit in Aufgabe 3.
- Leite v_{F} aus der Energiegleichung $\frac{1}{2}mv_{\text{F}}^2 - GM_{\text{E}}m/R_{\text{E}} = 0$ her. Warum fällt die Sondenmasse aus dem Ergebnis heraus?
- Berechne die Gravitationsenergie der Sonde an der Oberfläche und in 400 km Höhe. Wie viel Energie ist für diese Höhenänderung mindestens nötig, wenn Anfangs- und Endgeschwindigkeit gleich sind?
- Erkläre, warum die Formel für die Fluchtgeschwindigkeit keine Energieverluste durch Luftwiderstand berücksichtigt.

Platz für Skizzen und Rechnungen



Lösungen

Aufgaben 1 und 2 | Gravitationskraft und Abstandsgesetz

1. Gewichtskraft auf der Erde

- a) $g_0 = GM_E/R_E^2 \approx 9,82 \text{ m/s}^2$. Damit $F_0 = mg_0 \approx 736 \text{ N}$.
- b) $r = R_E + h = 6,771 \cdot 10^6 \text{ m}$. Somit $g_h = GM_E/r^2 \approx 8,69 \text{ m/s}^2$ und $F_h = mg_h \approx 652 \text{ N}$.
- c) $F_h/F_0 = (R_E/r)^2 \approx 0,885$. Die Gravitationskraft beträgt noch etwa 88,5 % des Werts am Boden. Sonde und Person fallen auf der Umlaufbahn gemeinsam frei; deshalb fehlt eine spürbare Stützkraft.

2. Gewichtskraft halbieren

- a) $GM_E m/(R_E + h_{1/2})^2 = \frac{1}{2} GM_E m/R_E^2$. Kürzen ergibt $(R_E + h_{1/2})^2 = 2R_E^2$.
- b) $h_{1/2} = (\sqrt{2} - 1)R_E \approx 2,64 \cdot 10^6 \text{ m} = 2640 \text{ km}$.
- c) Die Aussage ist falsch: $h_{1/2} \approx 0,414R_E$. Entscheidend ist der Abstand zum Erdmittelpunkt, der auf $\sqrt{2}R_E$ wächst.
- d) Wegen $F_G \propto 1/r^2$ sinkt die Kraft auf $1/3^2 = 1/9$ des Ausgangswerts.

Lösungen

Aufgaben 3 und 4 | Kreisbahn und Energie

3. Ein Satellit auf Kreisbahn

- a) $F_G = GM_E m_S / r^2 \approx 4,35 \cdot 10^3 \text{ N}$. An der Oberfläche wären es $GM_E m_S / R_E^2 \approx 4,91 \cdot 10^3 \text{ N}$.
- b) Aus $GM_E m_S / r^2 = m_S v^2 / r$ folgt nach Kürzen $v = \sqrt{GM_E / r} \approx 7,67 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.
- c) $T = 2\pi r / v \approx 5545 \text{ s} \approx 92,4 \text{ min}$. In 24 Stunden sind das rechnerisch $86400 / T \approx 15,6$ Umläufe.
- d) Sowohl Gravitations- als auch Zentripetalkraft sind proportional zu m_S . Beim Gleichsetzen kürzt sich die Masse.

4. Von der Kreisbahn zur Flucht

- a) $v_F = \sqrt{2GM_E / R_E} \approx 1,12 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$. Das ist grösser als die Kreisbahngeschwindigkeit aus Aufgabe 3 ($7,67 \text{ km/s}$).
- b) Aus $\frac{1}{2}mv_F^2 = GM_E m / R_E$ folgt $v_F^2 = 2GM_E / R_E$. Die Masse m steht auf beiden Seiten und kürzt sich.
- c) $E_{\text{pot}}(R_E) \approx -3,13 \cdot 10^{10} \text{ J}$ und $E_{\text{pot}}(R_E + h) \approx -2,94 \cdot 10^{10} \text{ J}$. Der Unterschied beträgt $\Delta E_{\text{pot}} = GM_E m (1/R_E - 1/(R_E + h)) \approx 1,85 \cdot 10^9 \text{ J}$.
- d) Das Modell setzt nur Gravitations- und Bewegungsenergie an. Luftwiderstand würde zusätzliche Energie benötigen; die reale Startgeschwindigkeit hängt ausserdem vom Flugverlauf ab.