

Schwierige Aufgaben zur idealen Gasgleichung

Aufgaben

Verwende, falls nicht anders angegeben:

$$pV = nRT$$

$$R = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$1 \text{ bar} = 100000 \text{ Pa}, \quad T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15$$

1. Autoreifen nach einer Fahrt

Ein Autoreifen hat bei

20°C

einen Überdruck von

2.3 bar.

Der Luftdruck aussen beträgt

1.0 bar.

Nach einer langen Fahrt hat die Luft im Reifen eine Temperatur von

55°C.

Das Volumen des Reifens bleibt näherungsweise konstant.

- (a) Berechne den absoluten Druck im Reifen nach der Fahrt.
- (b) Berechne den neuen Überdruck.

2. Sauerstoffflasche

Eine Sauerstoffflasche hat ein Volumen von

$$V = 12 \text{ L.}$$

Der absolute Druck beträgt

$$p = 150 \text{ bar}$$

bei

$$15^\circ\text{C.}$$

Die molare Masse von Sauerstoff ist

$$M_{\text{O}_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

- (a) Berechne die Stoffmenge Sauerstoff in der Flasche.
- (b) Berechne die Masse des Sauerstoffs.
- (c) Es werden 0.50 kg Sauerstoff entnommen. Berechne den neuen Druck bei gleicher Temperatur.

3. Gasverlust beim Erwärmen

Ein starrer Behälter hat ein Volumen von

$$V = 0.080 \text{ m}^3.$$

Zu Beginn gilt:

$$p_1 = 4.0 \text{ bar}, \quad T_1 = 300 \text{ K.}$$

Der Behälter wird auf

$$T_2 = 420 \text{ K}$$

erwärmt.

Wegen eines kleinen Lecks beträgt der Enddruck nur

$$p_2 = 4.5 \text{ bar.}$$

- (a) Berechne die Stoffmenge am Anfang.

- (b) Berechne die Stoffmenge am Ende.
- (c) Wie viel Prozent des Gases ist entwichen?

4. Zwei verbundene Gasbehälter

Zwei starre Behälter sind zuerst getrennt.

Behälter A:

$$V_A = 2.0 \text{ L}, \quad p_A = 5.0 \text{ bar.}$$

Behälter B:

$$V_B = 3.0 \text{ L}, \quad p_B = 1.0 \text{ bar.}$$

Beide Behälter enthalten dasselbe ideale Gas und haben dieselbe Temperatur. Dann wird ein Ventil zwischen den Behältern geöffnet.

Berechne den Enddruck, wenn die Temperatur gleich bleibt.

5. Kolben mit Gaszufuhr

Ein Gas befindet sich in einem Zylinder mit beweglichem Kolben. Der Druck bleibt konstant bei

$$p = 1.2 \text{ bar.}$$

Am Anfang gilt:

$$V_1 = 4.0 \text{ L}, \quad T_1 = 20^\circ\text{C.}$$

Am Ende gilt:

$$V_2 = 6.0 \text{ L}, \quad T_2 = 80^\circ\text{C.}$$

- (a) Berechne die Stoffmenge am Anfang.
- (b) Berechne die Stoffmenge am Ende.
- (c) Wurde Gas hinzugefügt oder entfernt? Berechne die Stoffmengenänderung.

6. Zusätzliches Kohlenstoffdioxid in einem Behälter

Ein starrer Behälter hat ein Volumen von

$$V = 5.0 \text{ L.}$$

Er enthält zuerst Luft bei

$$p = 1.0 \text{ bar}$$

und

$$20^\circ\text{C.}$$

Dann werden

$$12 \text{ g}$$

Kohlenstoffdioxid hinzugefügt.

Die molare Masse von Kohlenstoffdioxid ist

$$M_{\text{CO}_2} = 44 \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

Danach wird der Behälter auf

$$40^\circ\text{C}$$

erwärmt.

Berechne den Enddruck im Behälter.

7. Schwierige Aufgabe: Gasmenge aus Druckanstieg bestimmen

In einen starren, evakuierten Behälter mit dem Volumen

$$V = 0.025 \text{ m}^3$$

wird ein unbekanntes Gas eingeleitet.

Bei

$$25^\circ\text{C}$$

beträgt der Druck

$$p = 2.8 \text{ bar.}$$

Die Masse des eingeleiteten Gases ist

$$m = 18.0 \text{ g.}$$

- (a) Berechne die Stoffmenge des Gases.
- (b) Berechne die molare Masse des Gases.
- (c) Entscheide, ob das Gas eher Helium, Stickstoff oder Argon sein könnte.

$$M_{\text{He}} = 4.0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad M_{\text{N}_2} = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad M_{\text{Ar}} = 40 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

8. Methan-Luft-Gemisch in einem Brennraum

Ein Brennraum hat vor der Zündung ein Volumen von

$$V = 1.0 \text{ L.}$$

Er wird mit einem Gemisch aus Methan und Luft gefüllt. Der Anfangsdruck beträgt

$$p = 1.0 \text{ bar}$$

bei

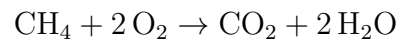
$$20^\circ\text{C.}$$

Luft enthält näherungsweise

$$21 \%$$

Sauerstoff.

Die Reaktionsgleichung für die vollständige Verbrennung von Methan lautet:



Pro Mol Methan wird ungefähr die Energie

$$E_{\text{mol}} = 890 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

frei.

Nimm vereinfacht an, dass keine mechanische Arbeit geleistet wird. Das Volumen bleibt also während der Verbrennung konstant. Für die Verbrennungsgase verwenden wir die mittlere molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen

$$c_V = 30 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

- (a) Berechne den maximalen Volumenanteil Methan im Gemisch, so-
dass gerade noch vollständige Verbrennung möglich ist.
- (b) Berechne die Stoffmenge Methan im Brennraum.
- (c) Berechne die freigesetzte Energie.
- (d) Berechne die Endtemperatur, wenn keine mechanische Arbeit ge-
leistet wird und keine Wärme verloren geht.
- (e) Berechne den Enddruck im Brennraum.

Lösungen

1. Autoreifen nach einer Fahrt

Der absolute Anfangsdruck ist:

$$p_1 = 2.3 \text{ bar} + 1.0 \text{ bar}$$

$$p_1 = 3.3 \text{ bar}$$

$$T_1 = 293.15 \text{ K}$$

$$T_2 = 328.15 \text{ K}$$

Bei konstantem Volumen und konstanter Stoffmenge gilt:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

$$p_2 = 3.3 \cdot \frac{328.15}{293.15}$$

$$p_2 \approx 3.69 \text{ bar}$$

Der neue Überdruck ist:

$$p_{\text{über}} = 3.69 \text{ bar} - 1.0 \text{ bar}$$

$$p_{\text{über}} \approx 2.69 \text{ bar}$$

2. Sauerstoffflasche

$$V = 12 \text{ L} = 0.012 \text{ m}^3$$

$$p = 150 \text{ bar} = 15000000 \text{ Pa}$$

$$T = 15^\circ\text{C} + 273.15 = 288.15 \text{ K}$$

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{15000000 \cdot 0.012}{8.31 \cdot 288.15}$$

$$n \approx 75.2 \text{ mol}$$

Masse:

$$m = n \cdot M$$

$$m = 75.2 \cdot 32 \text{ g}$$

$$m \approx 2406 \text{ g} = 2.41 \text{ kg}$$

Nach der Entnahme bleiben:

$$m_2 = 2.41 \text{ kg} - 0.50 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1.91 \text{ kg} = 1910 \text{ g}$$

$$n_2 = \frac{1910}{32}$$

$$n_2 \approx 59.7 \text{ mol}$$

$$p_2 = \frac{n_2 RT}{V}$$

$$p_2 = \frac{59.7 \cdot 8.31 \cdot 288.15}{0.012}$$

$$p_2 \approx 11900000 \text{ Pa}$$

$$p_2 \approx 119 \text{ bar}$$

3. Gasverlust beim Erwärmen

Anfang:

$$p_1 = 4.0 \text{ bar} = 400000 \text{ Pa}$$

$$n_1 = \frac{p_1 V}{RT_1}$$

$$n_1 = \frac{400000 \cdot 0.080}{8.31 \cdot 300}$$

$$n_1 \approx 12.8 \text{ mol}$$

Ende:

$$p_2 = 4.5 \text{ bar} = 450000 \text{ Pa}$$

$$n_2 = \frac{p_2 V}{RT_2}$$

$$n_2 = \frac{450000 \cdot 0.080}{8.31 \cdot 420}$$

$$n_2 \approx 10.3 \text{ mol}$$

Entwichene Stoffmenge:

$$\Delta n = 12.8 - 10.3$$

$$\Delta n = 2.5 \text{ mol}$$

Prozentualer Verlust:

$$\frac{\Delta n}{n_1} \cdot 100 \% = \frac{2.5}{12.8} \cdot 100 \%$$

Es sind ungefähr 20 % des Gases entwichen.

4. Zwei verbundene Gasbehälter

Da Temperatur und Gasart gleich bleiben, ist die Stoffmenge proportional zu pV .

$$p_{\text{Ende}} = \frac{p_A V_A + p_B V_B}{V_A + V_B}$$

$$p_{\text{Ende}} = \frac{5.0 \cdot 2.0 + 1.0 \cdot 3.0}{2.0 + 3.0}$$

$$p_{\text{Ende}} = \frac{13}{5}$$

$$p_{\text{Ende}} = 2.6 \text{ bar}$$

5. Kolben mit Gaszufuhr

$$p = 1.2 \text{ bar} = 120000 \text{ Pa}$$

$$V_1 = 4.0 \text{ L} = 0.0040 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 293.15 \text{ K}$$

$$n_1 = \frac{pV_1}{RT_1}$$

$$n_1 = \frac{120000 \cdot 0.0040}{8.31 \cdot 293.15}$$

$$n_1 \approx 0.197 \text{ mol}$$

$$V_2 = 6.0 \text{ L} = 0.0060 \text{ m}^3$$

$$T_2 = 353.15 \text{ K}$$

$$n_2 = \frac{pV_2}{RT_2}$$

$$n_2 = \frac{120000 \cdot 0.0060}{8.31 \cdot 353.15}$$

$$n_2 \approx 0.245 \text{ mol}$$

$$\Delta n = n_2 - n_1$$

$$\Delta n = 0.245 - 0.197$$

$$\boxed{\Delta n \approx 0.048 \text{ mol}}$$

Es wurde Gas hinzugefügt.

6. Zusätzliches Kohlenstoffdioxid in einem Behälter

Zuerst berechnen wir die Stoffmenge der Luft:

$$V = 5.0 \text{ L} = 0.0050 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 293.15 \text{ K}$$

$$n_{\text{Luft}} = \frac{pV}{RT_1}$$

$$n_{\text{Luft}} = \frac{100000 \cdot 0.0050}{8.31 \cdot 293.15}$$

$$n_{\text{Luft}} \approx 0.205 \text{ mol}$$

Stoffmenge des Kohlenstoffdioxids:

$$n_{\text{CO}_2} = \frac{12}{44}$$

$$n_{\text{CO}_2} \approx 0.273 \text{ mol}$$

Gesamtstoffmenge:

$$n_{\text{gesamt}} = 0.205 + 0.273$$

$$n_{\text{gesamt}} = 0.478 \text{ mol}$$

Endtemperatur:

$$T_2 = 313.15 \text{ K}$$

$$p_2 = \frac{n_{\text{gesamt}} RT_2}{V}$$

$$p_2 = \frac{0.478 \cdot 8.31 \cdot 313.15}{0.0050}$$

$$p_2 \approx 249000 \text{ Pa}$$

$$\boxed{p_2 \approx 2.49 \text{ bar}}$$

7. Gasmenge aus Druckanstieg bestimmen

$$p = 2.8 \text{ bar} = 280000 \text{ Pa}$$

$$T = 25^\circ\text{C} + 273.15 = 298.15 \text{ K}$$

$$n = \frac{pV}{RT}$$

$$n = \frac{280000 \cdot 0.025}{8.31 \cdot 298.15}$$

$$n \approx 2.83 \text{ mol}$$

Molare Masse:

$$M = \frac{m}{n}$$

$$M = \frac{18.0}{2.83}$$

$$M \approx 6.4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$M \approx 6.4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

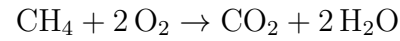
Dieser Wert liegt am nächsten bei Helium. Er passt aber nicht sehr gut, denn Helium hat

$$M_{\text{He}} = 4.0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

Helium ist am wahrscheinlichsten.

8. Methan-Luft-Gemisch in einem Brennraum

Die Reaktionsgleichung lautet:



Ein Mol Methan benötigt zwei Mol Sauerstoff.

Sei x der Volumenanteil von Methan im Gemisch. Dann ist der Luftanteil

$$1 - x.$$

Der Sauerstoffanteil im gesamten Gemisch ist:

$$0.21(1 - x)$$

Für vollständige Verbrennung muss gelten:

$$2x = 0.21(1 - x)$$

$$2x = 0.21 - 0.21x$$

$$2.21x = 0.21$$

$$x = \frac{0.21}{2.21}$$

$$x \approx 0.095$$

$$\boxed{x \approx 9.5\%}$$

Nun berechnen wir die gesamte Stoffmenge im Brennraum:

$$V = 1.0 \text{ L} = 0.0010 \text{ m}^3$$

$$p = 1.0 \text{ bar} = 100000 \text{ Pa}$$

$$T = 20^{\circ}\text{C} + 273.15 = 293.15 \text{ K}$$

$$n_{\text{gesamt}} = \frac{pV}{RT}$$

$$n_{\text{gesamt}} = \frac{100000 \cdot 0.0010}{8.31 \cdot 293.15}$$

$$n_{\text{gesamt}} \approx 0.0411 \text{ mol}$$

Die Stoffmenge Methan ist:

$$n_{\text{CH}_4} = x \cdot n_{\text{gesamt}}$$

$$n_{\text{CH}_4} = 0.095 \cdot 0.0411$$

$$n_{\text{CH}_4} \approx 0.0039 \text{ mol}$$

Freigesetzte Energie:

$$E = n_{\text{CH}_4} \cdot E_{\text{mol}}$$

$$E = 0.0039 \cdot 890 \text{ kJ}$$

$$E \approx 3.5 \text{ kJ}$$

$$\boxed{E \approx 3.5 \text{ kJ}}$$

Wenn keine mechanische Arbeit geleistet wird und keine Wärme verloren geht, wird die freigesetzte Energie in innere Energie der Gase umgewandelt:

$$E = n_{\text{gesamt}} c_V \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{E}{n_{\text{gesamt}} c_V}$$

$$\Delta T = \frac{3500}{0.0411 \cdot 30}$$

$$\Delta T \approx 2840 \text{ K}$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

$$T_2 = 293.15 + 2840$$

$$T_2 \approx 3130 \text{ K}$$

$$\boxed{T_2 \approx 3100 \text{ K}}$$

Bei der Reaktion bleibt die Gesamtzahl der Gasmole näherungsweise gleich, wenn Wasserdampf gasförmig bleibt:

$$\text{vorher: } 1 \text{ CH}_4 + 2 \text{ O}_2 + 7.52 \text{ N}_2$$

$$\text{nachher: } 1 \text{ CO}_2 + 2 \text{ H}_2\text{O} + 7.52 \text{ N}_2$$

Da das Volumen konstant bleibt, gilt näherungsweise:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

$$p_2 = 1.0 \text{ bar} \cdot \frac{3130}{293.15}$$

$$p_2 \approx 10.7 \text{ bar}$$

$$\boxed{p_2 \approx 11 \text{ bar}}$$