Barometrische Höhenformel

Theorie

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, weil sich über einem höheren Ort weniger Luft befindet. Wenn man annimmt, dass die Temperatur konstant bleibt, kann man den Druck mit der barometrischen Höhenformel beschreiben.

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

Dabei bedeuten:

$$p(h) = \text{Luftdruck in der Höhe } h$$

$$p_0 = \text{Luftdruck auf der Bezugshöhe}$$

$$M = \text{molare Masse der Luft}$$

$$g = \text{Erdbeschleunigung}$$

$$h = \text{Höhenunterschied}$$

$$R = \text{allgemeine Gaskonstante}$$

$$T = \text{absolute Temperatur in Kelvin}$$

Häufig verwendet man auch die Skalenhöhe

$$H = \frac{RT}{Mg}.$$

Dann wird die Formel einfacher:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$$

Wenn der Druck in einer bestimmten Höhe bekannt ist, kann man die Höhe berechnen:

$$h = H \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p(h)}\right)$$

Verwende, falls nicht anders angegeben:

$$R = 8.31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}, \qquad g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$M_{\mathrm{Luft}} = 0.029\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}, \qquad p_0 = 1013\,\mathrm{hPa}$$

$$T(\mathrm{K}) = T(^\circ\mathrm{C}) + 273.15$$

Aufgaben

1. **Luftdruck auf einem Berg**

   Auf Meereshöhe beträgt der Luftdruck

   $$p_0 = 1013\,\mathrm{hPa}.$$

   Die Temperatur der Luft beträgt näherungsweise

   $$15°\mathrm{C}.$$

   (a) Berechne die Skalenhöhe H.

   (b) Berechne den Luftdruck in

   $$h = 1000\,\mathrm{m}$$

   Höhe.

   (c) Berechne den Luftdruck in

   $$h = 2000\,\mathrm{m}$$

   Höhe.

2. **Höhe aus dem Luftdruck bestimmen**

   Ein Barometer zeigt auf einem Pass einen Luftdruck von

   $$p = 850\,\mathrm{hPa}.$$

   Auf Meereshöhe gilt:

   $$p_0 = 1013\,\mathrm{hPa}.$$

   Die Lufttemperatur soll konstant sein bei

   $$15°\mathrm{C}.$$

   Berechne die Höhe des Passes über Meer.

3. **Dichte der Luft in der Höhe**

   Auf Meereshöhe hat die Luft bei gleicher Temperatur die Dichte

   $$\rho_0 = 1.20\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

   Bei konstanter Temperatur ist die Dichte proportional zum Druck.

   (a) Berechne den Druckanteil

   $$\frac{p(h)}{p_0}$$

   in

   $$h = 1500\,\mathrm{m}$$

   Höhe bei

   $$15^\circ\mathrm{C}.$$

   (b) Berechne die Luftdichte in dieser Höhe.

   (c) Berechne die Masse der Luft in einem Raum mit

   $$V = 0.60\,\mathrm{m}^3$$

   in dieser Höhe.

4. **Heliumballon beim Aufsteigen**

   Ein flexibler Ballon wird am Boden mit Helium gefüllt. Am Boden hat er das Volumen

   $$V_0 = 30\,\mathrm{L}.$$

   Der Luftdruck am Boden beträgt

   $$p_0 = 1013\,\mathrm{hPa}$$

   Der Ballon hat am Boden einen Überdruck von

   $$0.04\,\mathrm{bar}.$$

   Die Temperatur beträgt näherungsweise

   $$15^\circ\mathrm{C}.$$

Der Ballon steigt auf. Dabei dehnt er sich aus auf

$$V_1 = 45\,\mathrm{L}.$$

Nimm an, dass die Temperatur des Heliums konstant bleibt.

(a) Berechne den absoluten Druck im Ballon am Boden.

(b) Berechne den absoluten Druck im Ballon, wenn sein Volumen 45 L beträgt.

(c) Berechne die Höhe, in der der Ballon dieses Volumen erreicht.

(d) Warum kann der Ballon nicht unendlich weiter steigen?

5. **Heissluftballon**

Ein Heissluftballon hat ein Volumen von

$$V = 6000\,\mathrm{m}^3.$$

Die Masse von Ballonhülle, Korb, Personen und Ausrüstung beträgt zusammen

$$m = 1000\,\mathrm{kg}.$$

Die Luft im Ballon wird im Mittel auf

$$80°\mathrm{C}$$

erwärmt.

Die Aussenluft habe näherungsweise

$$15°\mathrm{C}.$$

Nimm an, dass der Treibstoffverbrauch gering ist und die Masse des Ballons während des Fluges konstant bleibt.

(a) Stelle eine Gleichung für den Auftrieb auf.

(b) Berechne den Luftdruck, bei dem der Ballon gerade schwebt.

(c) Berechne daraus die Flughöhe des Ballons.

Hinweis:

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

Lösungen

1. **Luftdruck auf einem Berg**

$$T = 15°\mathrm{C} + 273.15 = 288.15\,\mathrm{K}$$

$$H = \frac{RT}{Mg}$$

$$H = \frac{8.31 \cdot 288.15}{0.029 \cdot 9.81}$$

$$H \approx 8410\,\mathrm{m}$$

Für

$$h = 1000\,\mathrm{m}$$

gilt:

$$p(1000) = 1013 \cdot e^{-\frac{1000}{8410}}$$

$$p(1000) \approx 899\,\mathrm{hPa}$$

Für

$$h = 2000\,\mathrm{m}$$

gilt:

$$p(2000) = 1013 \cdot e^{-\frac{2000}{8410}}$$

$$\boxed{p(2000) \approx 798\,\mathrm{hPa}}$$

2. **Höhe aus dem Luftdruck bestimmen**

Aus Aufgabe 1:

$$H \approx 8410\,\mathrm{m}$$

$$h = H \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

$$h = 8410 \cdot \ln\left(\frac{1013}{850}\right)$$

$$h \approx 1470\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{h \approx 1.47\,\mathrm{km}}$$

3. **Dichte der Luft in der Höhe**

$$\frac{p(h)}{p_0} = e^{-\frac{h}{H}}$$

$$\frac{p(1500)}{p_0} = e^{-\frac{1500}{8410}}$$

$$\frac{p(1500)}{p_0} \approx 0.837$$

Da die Dichte proportional zum Druck ist:

$$\rho(1500) = \rho_0 \cdot 0.837$$

$$\rho(1500) = 1.20 \cdot 0.837$$

$$\rho(1500) \approx 1.00\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Masse der Luft:

$$m = \rho V$$

$$m = 1.00 \cdot 0.60$$

$$\boxed{m \approx 0.60\,\mathrm{kg}}$$

4. **Heliumballon beim Aufsteigen**

$$T = 15^\circ\mathrm{C} + 273.15 = 288.15\,\mathrm{K}$$

$$H = \frac{8.31 \cdot 288.15}{0.029 \cdot 9.81}$$

$$H \approx 8410\,\mathrm{m}$$

Der Überdruck am Boden beträgt:

$$0.04\,\mathrm{bar} = 40\,\mathrm{hPa}$$

Der absolute Druck im Ballon am Boden ist daher:

$$p_{\mathrm{B},0} = 1013\,\mathrm{hPa} + 40\,\mathrm{hPa}$$

$$p_{\mathrm{B},0} = 1053\,\mathrm{hPa}$$

Bei konstanter Temperatur und konstanter Stoffmenge gilt:

$$pV = \text{konstant}$$

$$p_{\mathrm{B},0} V_0 = p_{\mathrm{B},1} V_1$$

$$p_{\mathrm{B},1} = p_{\mathrm{B},0} \cdot \frac{V_0}{V_1}$$

$$p_{\mathrm{B},1} = 1053 \cdot \frac{30}{45}$$

$$p_{\mathrm{B},1} \approx 702\,\mathrm{hPa}$$

In dieser Aufgabe ist der Ballon bei

$$V_1 = 45\,\mathrm{L}$$

gerade so weit ausgedehnt, dass der Innendruck gleich dem Aussendruck ist:

$$p_1 = p_{\mathrm{B},1}$$

$$p_1 \approx 702\,\mathrm{hPa}$$

Nun verwenden wir die umgestellte barometrische Höhenformel:

$$h = H \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

$$h = 8410 \cdot \ln\left(\frac{1013}{702}\right)$$

$$h \approx 3080\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{h \approx 3.1\,\mathrm{km}}$$

Der Ballon kann nicht unendlich weiter steigen. Beim Aufsteigen sinkt der Aussendruck, deshalb dehnt sich das Helium immer weiter aus. Irgendwann ist die Ballonhülle maximal gedehnt. Danach platzt der Ballon oder Helium entweicht. Ausserdem nimmt der Auftrieb in sehr grosser Höhe ab, weil die Luftdichte kleiner wird.

5. **Heissluftballon**

$$T_{\mathrm{aussen}} = 15^{\circ}\mathrm{C} + 273.15 = 288.15\,\mathrm{K}$$

$$T_{\mathrm{innen}} = 80^{\circ}\mathrm{C} + 273.15 = 353.15\,\mathrm{K}$$

Der Heissluftballon schwebt gerade, wenn der Auftrieb die zu tragende Masse ausgleicht. Die heisse Luft im Ballon ist leichter als die verdrängte Aussenluft.

$$m = (\rho_{\text{aussen}} - \rho_{\text{innen}}) \cdot V$$

Mit

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

ergibt sich:

$$m = \left(\frac{pM}{RT_{\text{aussen}}} - \frac{pM}{RT_{\text{innen}}} \right) \cdot V$$

$$m = \frac{pM}{R} \left(\frac{1}{T_{\text{aussen}}} - \frac{1}{T_{\text{innen}}} \right) \cdot V$$

Umstellen nach p:

$$p = \frac{mR}{MV \left(\frac{1}{T_{\text{aussen}}} - \frac{1}{T_{\text{innen}}} \right)}$$

$$p = \frac{1000 \cdot 8.31}{0.029 \cdot 6000 \left(\frac{1}{288.15} - \frac{1}{353.15} \right)}$$

$$p \approx 74800\,\text{Pa}$$

$$p \approx 748\,\text{hPa}$$

Nun berechnen wir die Höhe:

$$h = H \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)$$

$$h = 8410 \cdot \ln \left(\frac{1013}{748} \right)$$

$$h \approx 2550\,\text{m}$$

$$\boxed{h \approx 2.6\,\text{km}}$$