

Barometrische Höhenformel

Theorie

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, weil sich über einem höheren Ort weniger Luft befindet. Wenn man annimmt, dass die Temperatur konstant bleibt, kann man den Druck mit der barometrischen Höhenformel beschreiben.

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

Dabei bedeuten:

$p(h)$ = Luftdruck in der Höhe h

p_0 = Luftdruck auf der Bezugshöhe

M = molare Masse der Luft

g = Erdbeschleunigung

h = Höhenunterschied

R = allgemeine Gaskonstante

T = absolute Temperatur in Kelvin

Häufig verwendet man auch die Skalenhöhe

$$H = \frac{RT}{Mg}.$$

Dann wird die Formel einfacher:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$$

Wenn der Druck in einer bestimmten Höhe bekannt ist, kann man die Höhe berechnen:

$$h = H \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p(h)} \right)$$

Verwende, falls nicht anders angegeben:

$$R = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}, \quad g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$M_{\text{Luft}} = 0.029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}, \quad p_0 = 1013 \text{ hPa}$$

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15$$

Aufgaben

1. Luftdruck auf einem Berg

Auf Meereshöhe beträgt der Luftdruck

$$p_0 = 1013 \text{ hPa.}$$

Die Temperatur der Luft beträgt näherungsweise

$$15^\circ\text{C.}$$

(a) Berechne die Skalenhöhe H .

(b) Berechne den Luftdruck in

$$h = 1000 \text{ m}$$

Höhe.

(c) Berechne den Luftdruck in

$$h = 2000 \text{ m}$$

Höhe.

2. Höhe aus dem Luftdruck bestimmen

Ein Barometer zeigt auf einem Pass einen Luftdruck von

$$p = 850 \text{ hPa.}$$

Auf Meereshöhe gilt:

$$p_0 = 1013 \text{ hPa.}$$

Die Lufttemperatur soll konstant sein bei

$$15^\circ\text{C.}$$

Berechne die Höhe des Passes über Meer.

3. Heliumballon beim Aufsteigen

Ein flexibler Ballon wird am Boden mit Helium gefüllt. Am Boden hat er das Volumen

$$V_0 = 30 \text{ L.}$$

Der Luftdruck am Boden beträgt

$$p_0 = 1013 \text{ hPa}$$

Der Ballon hat am Boden einen Überdruck von

$$0.04 \text{ bar.}$$

Die Temperatur beträgt näherungsweise

$$15^\circ\text{C.}$$

Der Ballon steigt auf. Dabei dehnt er sich aus auf

$$V_1 = 45 \text{ L.}$$

Nimm an, dass die Temperatur des Heliums konstant bleibt und dass der Überdruck des Ballons während des Aufstiegs näherungsweise

$$0.04 \text{ bar}$$

bleibt.

- (a) Berechne den absoluten Druck im Ballon am Boden.
- (b) Berechne den absoluten Druck im Ballon, wenn sein Volumen 45 L beträgt.
- (c) Berechne den äusseren Luftdruck in dieser Höhe.
- (d) Berechne die Höhe, in der der Ballon dieses Volumen erreicht.
- (e) Warum kann der Ballon nicht unendlich weiter steigen?

4. Halber Luftdruck

Bei

$$15^{\circ}\text{C}$$

soll der Luftdruck nur noch halb so gross sein wie auf Meereshöhe.

Berechne die Höhe, bei der gilt:

$$p(h) = \frac{1}{2}p_0.$$

5. Dichte der Luft in der Höhe

Auf Meereshöhe hat die Luft bei gleicher Temperatur die Dichte

$$\rho_0 = 1.20 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Bei konstanter Temperatur ist die Dichte proportional zum Druck.

(a) Berechne den Druckanteil

$$\frac{p(h)}{p_0}$$

in

$$h = 1500 \text{ m}$$

Höhe bei

$$15^{\circ}\text{C}.$$

(b) Berechne die Luftdichte in dieser Höhe.

(c) Berechne die Masse der Luft in einem Raum mit

$$V = 0.60 \text{ m}^3$$

in dieser Höhe.

6. Einfluss der Temperatur

Berechne den Luftdruck in

$$h = 2500 \text{ m}$$

Höhe für zwei verschiedene Temperaturen.

(a) Kalte Luft:

$$T = -10^{\circ}\text{C}$$

(b) Warme Luft:

$$T = 30^{\circ}\text{C}$$

(c) Vergleiche die beiden Ergebnisse. Bei welcher Temperatur ist der Luftdruck in gleicher Höhe grösser?

7. Schwierige Aufgabe: molare Masse aus Messdaten

In einem vereinfachten Atmosphärenmodell misst man:

$$p_0 = 1013 \text{ hPa}$$

auf Meereshöhe und

$$p = 700 \text{ hPa}$$

in der Höhe

$$h = 3000 \text{ m.}$$

Die Temperatur der Luftsäule beträgt

$$T = 280 \text{ K.}$$

Berechne aus diesen Daten die molare Masse der Luft.

Lösungen

1. Luftdruck auf einem Berg

$$T = 15^{\circ}\text{C} + 273.15 = 288.15 \text{ K}$$

$$H = \frac{RT}{Mg}$$

$$H = \frac{8.31 \cdot 288.15}{0.029 \cdot 9.81}$$

$$H \approx 8410 \text{ m}$$

Für

$$h = 1000 \text{ m}$$

gilt:

$$p(1000) = 1013 \cdot e^{-\frac{1000}{8410}}$$

$$p(1000) \approx 899 \text{ hPa}$$

Für

$$h = 2000 \text{ m}$$

gilt:

$$p(2000) = 1013 \cdot e^{-\frac{2000}{8410}}$$

$$\boxed{p(2000) \approx 798 \text{ hPa}}$$

2. Höhe aus dem Luftdruck bestimmen

Aus Aufgabe 1:

$$H \approx 8410 \text{ m}$$

$$h = H \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)$$

$$h = 8410 \cdot \ln \left(\frac{1013}{850} \right)$$

$$h \approx 1470 \text{ m}$$

$$\boxed{h \approx 1.47 \text{ km}}$$

3. Heliumballon beim Aufsteigen

$$T = 15^\circ\text{C} + 273.15 = 288.15 \text{ K}$$

$$H = \frac{8.31 \cdot 288.15}{0.029 \cdot 9.81}$$

$$H \approx 8410 \text{ m}$$

Der Überdruck am Boden beträgt:

$$0.04 \text{ bar} = 40 \text{ hPa}$$

Der absolute Druck im Ballon am Boden ist daher:

$$p_{\text{B},0} = 1013 \text{ hPa} + 40 \text{ hPa}$$

$$p_{\text{B},0} = 1053 \text{ hPa}$$

Bei konstanter Temperatur und konstanter Stoffmenge gilt:

$$pV = \text{konstant}$$

$$p_{\text{B},0}V_0 = p_{\text{B},1}V_1$$

$$p_{B,1} = p_{B,0} \cdot \frac{V_0}{V_1}$$

$$p_{B,1} = 1053 \cdot \frac{30}{45}$$

$$p_{B,1} \approx 702 \text{ hPa}$$

Wenn der Ballon weiterhin ungefähr

$$40 \text{ hPa}$$

Überdruck hat, ist der äussere Luftdruck:

$$p_1 = 702 \text{ hPa} - 40 \text{ hPa}$$

$$p_1 = 662 \text{ hPa}$$

Nun verwenden wir die umgestellte barometrische Höhenformel:

$$h = H \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$$

$$h = 8410 \cdot \ln \left(\frac{1013}{662} \right)$$

$$h \approx 3580 \text{ m}$$

$$\boxed{h \approx 3.6 \text{ km}}$$

Der Ballon kann nicht unendlich weiter steigen. Beim Aufsteigen sinkt der Aussendruck, deshalb dehnt sich das Helium immer weiter aus. Irgendwann ist die Ballonhülle maximal gedehnt. Danach platzt der Ballon oder Helium entweicht. Ausserdem nimmt der Auftrieb in sehr grosser Höhe ab, weil die Luftdichte kleiner wird.

4. Halber Luftdruck

$$p(h) = \frac{1}{2}p_0$$

$$\frac{1}{2}p_0 = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{h}{H}}$$

Logarithmieren ergibt:

$$h = H \cdot \ln(2)$$

$$h = 8410 \cdot 0.693$$

$$\boxed{h \approx 5830 \text{ m}}$$

5. Dichte der Luft in der Höhe

$$\frac{p(h)}{p_0} = e^{-\frac{h}{H}}$$

$$\frac{p(1500)}{p_0} = e^{-\frac{1500}{8410}}$$

$$\frac{p(1500)}{p_0} \approx 0.837$$

Da die Dichte proportional zum Druck ist:

$$\rho(1500) = \rho_0 \cdot 0.837$$

$$\rho(1500) = 1.20 \cdot 0.837$$

$$\rho(1500) \approx 1.00 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Masse der Luft:

$$m = \rho V$$

$$m = 1.00 \cdot 0.60$$

$$m \approx 0.60 \text{ kg}$$

6. Einfluss der Temperatur

Kalte Luft:

$$T = -10^\circ\text{C} + 273.15 = 263.15 \text{ K}$$

$$H = \frac{8.31 \cdot 263.15}{0.029 \cdot 9.81}$$

$$H \approx 7680 \text{ m}$$

$$p = 1013 \cdot e^{-\frac{2500}{7680}}$$

$$p \approx 732 \text{ hPa}$$

Warme Luft:

$$T = 30^\circ\text{C} + 273.15 = 303.15 \text{ K}$$

$$H = \frac{8.31 \cdot 303.15}{0.029 \cdot 9.81}$$

$$H \approx 8850 \text{ m}$$

$$p = 1013 \cdot e^{-\frac{2500}{8850}}$$

$$p \approx 764 \text{ hPa}$$

Bei warmer Luft ist der Druck in gleicher Höhe grösser.

7. Molare Masse aus Messdaten

Aus der barometrischen Höhenformel:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

Umstellen nach M :

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

$$\ln\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{Mgh}{RT}$$

$$M = \frac{RT}{gh} \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

$$M = \frac{8.31 \cdot 280}{9.81 \cdot 3000} \cdot \ln\left(\frac{1013}{700}\right)$$

$$M \approx 0.0293 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$M \approx 29.3 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Das passt gut zur mittleren molaren Masse von Luft.